Referat zum Thema Frequenzweichen / Signalfilterung

Gliederung:

Einleitung

I. Filter erster Ordnung

1. Tiefpass erster Ordnung
2. Hochpass erster Ordnung

II. Filter zweiter Ordnung

1.Tiefpass zweiter Ordnung
2.Bandpass zweiter Ordnung
3.Hochpass zweiter Ordnung

III. Vergleich von Filtern verschiedener Polfrequenzen und Polgüten

Einleitung

Jedes technische System kann durch die Kombination linearer und / oder nichtlinearer Filter nachgebildet werden. Die folgenden Darstellungen beschränken sich auf lineare, zeitinvariante Filter, die im Zeitbereich (t) durch eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung, und im Spektralbereich (p) durch eine komplexe Übertragungsfunktion n-ten Grades charakterisiert werden.

Da die Natur bevorzugt durch analoge Modelle mit zeit- und wertkontinuirlichen Signalen beschrieben werden kann (zwei Quanteneffekte bei makroskopischer Betrachtung keine Rolle spielen), wird das Handwerkszeug der Signal- und Systemanalyse zuerst mit Hilfe analoger Filter diskutiert. Die angegebenen Schaltungen dienen lediglich der Verdeutlichung, die besprochene Filtercharakteristik kann aber auch anders realisiert werden, z. B. durch die duale Schaltung oder durch ein mechanisches oder akustisches Netzwerk.

Die moderne Prozessortechnik ermöglicht darüber hinaus aber auch Algorithmen zurealisieren, die aufbauend auf zeit- und wertdiskreten Signalen – in der Natur kein Pendant finden.

I. Filter erster Ordnung

Filter erster Ordnung sind durch einen unabhängigen Speicher gekennzeichnet. Die Übertragungseigenschaften können folglich auch durch einen unabhängigen Speicher beschrieben werden. Im Frequenzbereich ist dies die Polfrequenz, im Zeitbereich die Zeitkonstante. Im Einzelfall kann aber auch ein anderer Parameter sinnvoll sein.

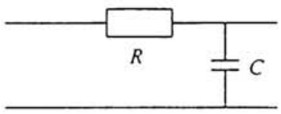
Zusätzlich ist zur vollständigen Beschreibung eines Filters auch die Grundverstärkung nötig.
Da das Verändern der Grundverstärkung aber nicht die prinzipielle Filtercharakteristik verändert, wird bei den meisten Filtern die Grundverstärkung zu 1 angenommen und nicht als spezieller Filterparameter definiert.
Eine übersichtliche Methode zur Beschreibung der Filtereigenschaften ist das Pol-/Nullstellendiagramm. Filter erster Ordnung werden durch eine gebrochen rationale Übertragunsfunktion beschrieben, die p in maximal erster Potenz enthält. Für technische Realisierbarkeit wird gefordert, dass der Zählergrad nicht größer ist als der Nennergrad. Somit muss für endliche Frequenzen ein Pol und keine, oder eine Nullstelle auftreten. Da die gebrochen rationale Funktion reelle Koeffizienten aufweist, sind Pol und Nst. Reell. Das PN. Diagramm beschreibt das Übertragungsverhalten eindeutig, mit Ausnahme der Grundverstärkung. Sie kann im PN- Diagramm nicht dargestellt werden.

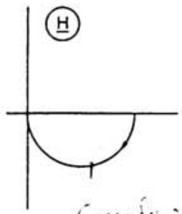
Im Zeitbereich ist die betrachtete Signalgröße die reelle Spannung u(t). Die zugehörige Spektraldarstellung liefert das komplexe Spektrum U(jw). Die Übertragungsfunktion als Quotient zweier Spektren ist ebenfalls komplex: H(jw). Sie kann auf der jw- Achse auf die gesamte p- Ebene erweitert werden: H(s+jw) = H(p).

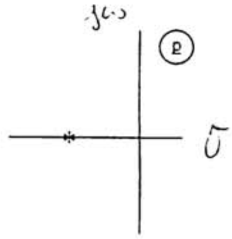
1.Tiefpass erster Ordnung

A1. Tiefpass erster Ordnung

TP1







$$\boxed{\underline{H}(p) = \frac{1}{1 + p\tau}}$$

Reeller Pol bei $p_x = -1/\tau$

Normierung: $\underline{H}(\Omega) = \dfrac{1}{1 + j\Omega} = \dfrac{1 - j\Omega}{1 + \Omega^2};$

$\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_x};\qquad \omega_x = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{RC};$

Verstärkung: $H = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}}$

Phase: $\varphi = -\arctan\Omega$

Gruppenlaufzeit: $\tau_G = \dfrac{\tau}{1 + \Omega^2}$

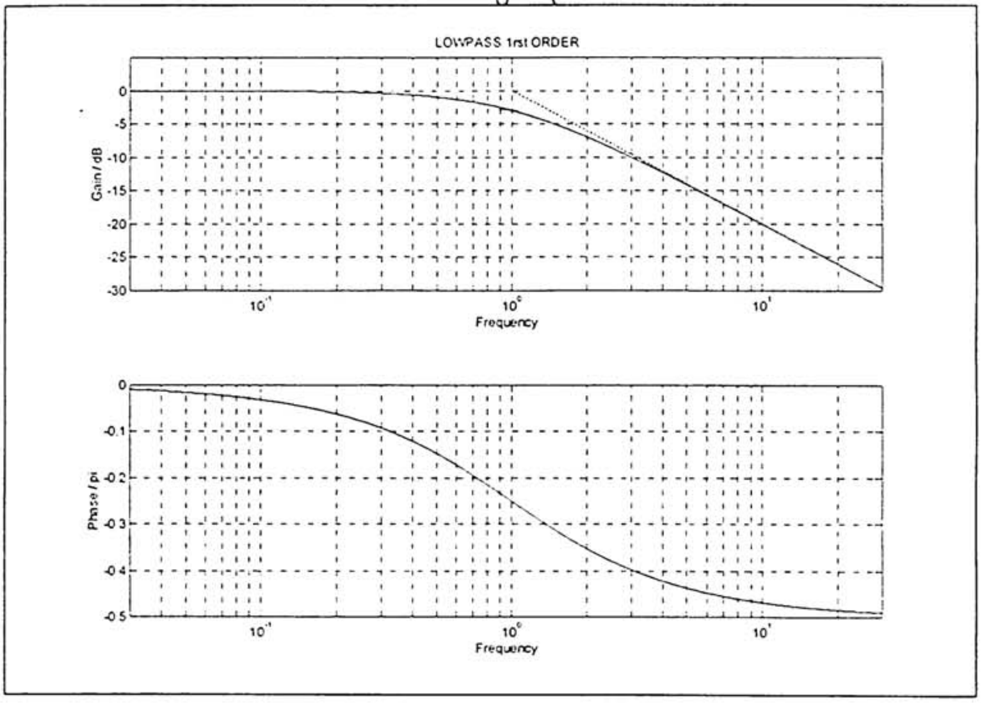
Phasenlaufzeit: $\tau_P = \dfrac{\arctan\Omega}{\Omega}\,\tau$

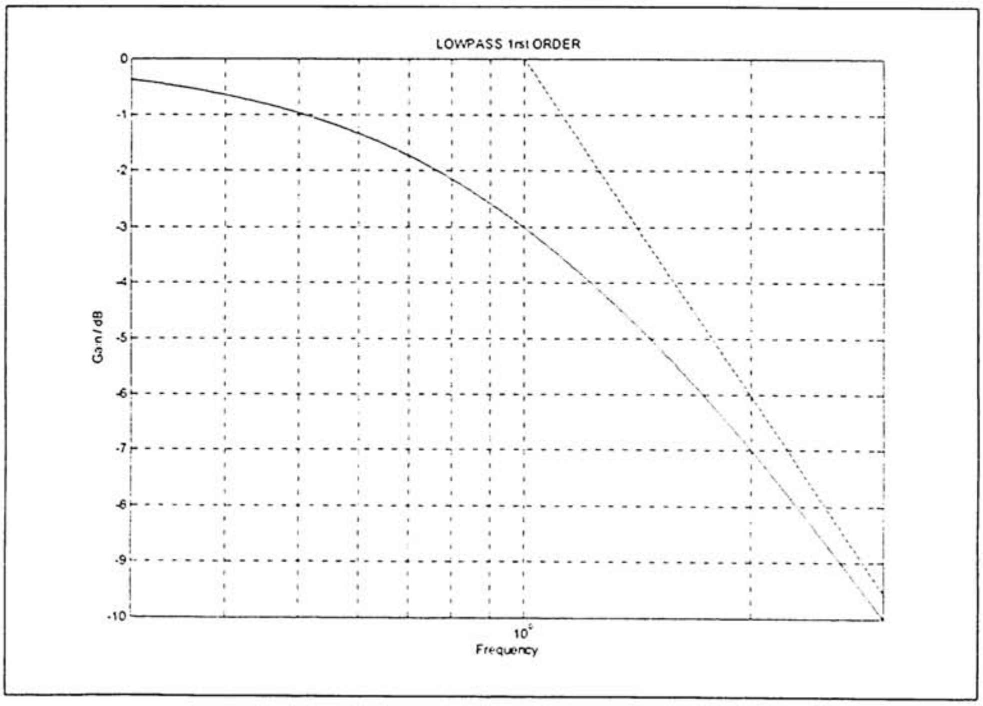
Impulsantwort: $h_0(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$

Sprungantwort: $h_{-1}(t) = 1 - e^{-t/\tau}$

TP1

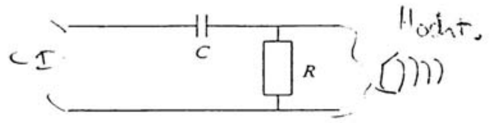
10^0 = Polfrequenz

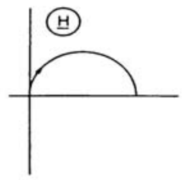


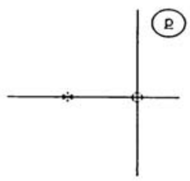


2. Hochpass erster Ordnung

A3. Hochpass erster Ordnung **HP1**







$$\boxed{\underline{H}(p) = \frac{p\tau}{1+p\tau}}$$

Reeller Pol bei $p_x = -1/\tau$

Reelle NSt bei $p_o = 0$

Normierung: $\underline{H}(\Omega) = \frac{j\Omega}{1+j\Omega} = \frac{1-j\Omega}{1/\Omega+\Omega}$;

$\Omega = \frac{\omega}{\omega_x}$; $\omega_x = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$;

Verstärkung: $H = \frac{1}{\sqrt{1+1/\Omega^2}}$

Phase: $\varphi = \operatorname{arc\,cot}\Omega$

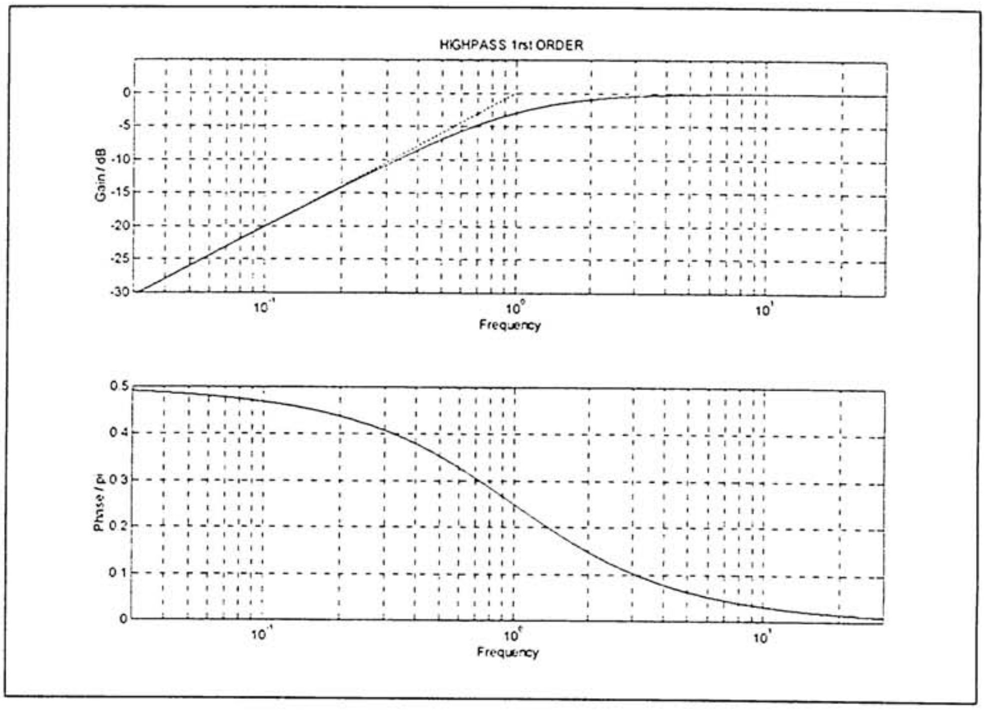
Gruppenlaufzeit: $\tau_G = \frac{\tau}{1+\Omega^2}$

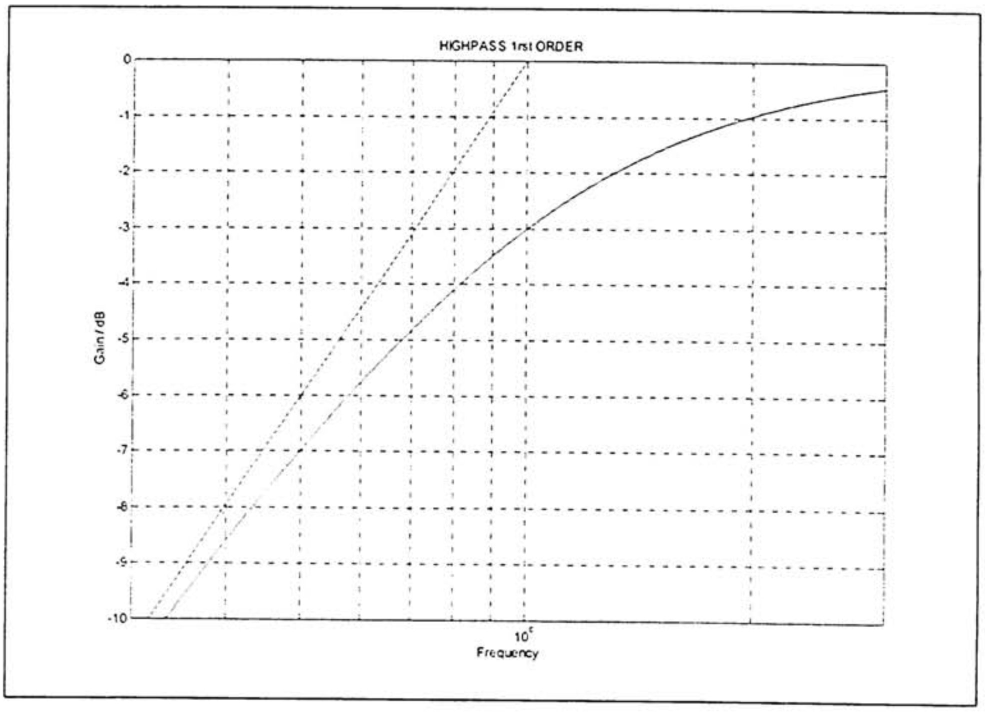
Phasenlaufzeit: $\tau_P = -\frac{\operatorname{arc\,cot}\Omega}{\Omega}\tau$

Impulsantwort: $h_0(t) = \delta_0(t) - \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$

Sprungantwort: $h_{-1}(t) = e^{-t/\tau}$

HP1


HIGHPASS 1rst ORDER
Gain / dB
Frequency
Phase / pi
Frequency


HIGHPASS 1rst ORDER
Gain / dB
Frequency

II. Filter zweiter Ordnung

Filter 2. Ordnung sind durch zwei unabhängige Speicher gekennzeichnet. Die Übertragungseigenschaften können folglich auch durch zwei unabhängige Parameter beschrieben werden. Im Frequenzbereich sind die zweckmäßigerweise Güte und Polfrequenz, im Zeitbereich Ausschwingfrequenz und Hüllkurvenzeitkonstante.

Zusätzlich ist zur vollständigen Beschreibung eines Filters auch die Grundverstärkung nötig. Da das Verändern der Grundverstärkung aber nicht die prinzipielle Filtercharakteristik verändert, wird bei den meisten Filtern die Grundverstärkung zu 1 angenommen und nicht als spezieller Filterparameter definiert.

Eine übersichtliche Methode zur Beschreibung der Filtereigenschaften liefert das Pol-/Nullstellendiagramm. Filter zweiter Ordnung werden durch eine gebrochen rational Übertragungsfunktion beschrieben, die p in maximal zweiter Potenz enthält. Für technische Realisierbarkeit wird gefordert dass der Zählergrad nicht größer ist als der Nennergrad. Somit müssen für endliche Frequenzen zwei Pole und keine oder, eine oder zwei Nullstellen auftreten. Da die gebrochen rationale Funktion reelle Koeffizienten aufweist, sind Pole und Nullstellen reell oder konjugiert komplex. Das PN - Diagramm beschreibt das Übertragungsverhalten eindeutig, mit Ausnahme der Grundverstärkung. Sie kann im PN- Diagramm nicht dargestellt werden.

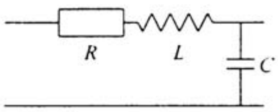
Die folgende Darstellung beschreibt Filter zweiter Ordnung mit konjugiert komplexen Polen. Filter mit reellen Polen könne als Kettenschaltung von Filter erster Ordnung zerlegt werden.

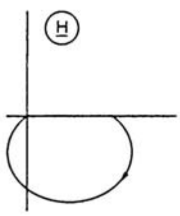
Im Zeitbereich ist die betrachtete Signalgröße die reelle Spannung u(t). Die zugehörige Spektraldarstellung liefert das komplexe Spektrum U(jw). Die Übertragungsfunktion als Quotient zweier Spektren ist ebenfalls komplex: H(jw). Sie kann auf der jw- Achse auf die gesamte p- Ebene erweitert werden: H(s+jw) = H(p).

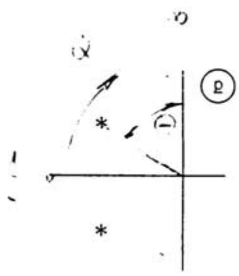
1.Tiefpass zweiter Ordnung

B1. Tiefpass zweiter Ordnung **TP2**

Güte Q>0.5







$$\boxed{\underline{H}(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_x Q} + \left(\frac{p}{\omega_x}\right)^2}}$$

Konjugierte Pole bei $p_x = -\frac{\omega_x}{2Q} \pm j\omega_x\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Normierung: $\underline{H}(\Omega) = \frac{1}{1 + j\Omega/Q - \Omega^2}$ $\Omega = \frac{\omega}{\omega_x}$; $\omega_x = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Verstärkung: $H = \frac{1}{\sqrt{\left(\Omega^2 - 1\right)^2 + (\Omega/Q)^2}}$ Phase: $\varphi = \operatorname{arc\,cot}\left[Q(\Omega - 1/\Omega)\right] - \pi$

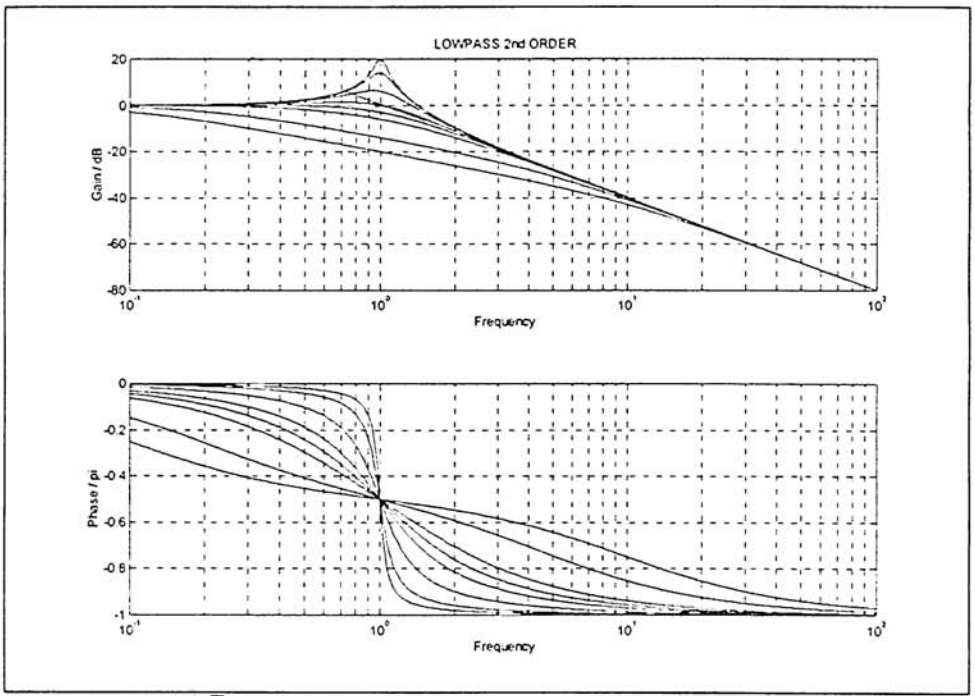
Gruppenlaufzeit: $\tau_G = \frac{\tau}{Q} \cdot \frac{1 + \Omega^2}{\left(\Omega^2 - 1\right)^2 + (\Omega/Q)^2}$; $\tau = 1/\omega_x$

Impulsantwort: $h_0(t) = \frac{\omega_x \cdot e^{-\delta t}}{\sqrt{1 - \vartheta^2}} \sin(\omega_d t)$ Sprungantwort: $h_{-1}(t) = 1 - \frac{e^{-\delta t}}{\sqrt{1 - \vartheta^2}} \cos(\omega_d t - \Theta)$

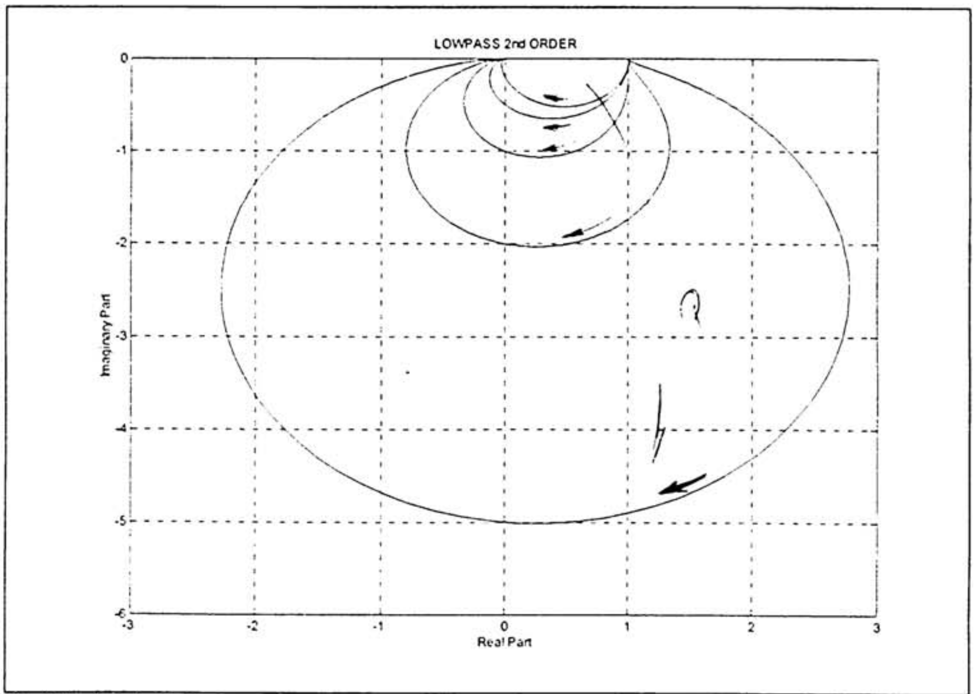
Überschwingen: $\frac{\hat{u} - u_0}{u_0} = e^{-\Lambda/2}$

$\hat{f} = f_x \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

TP2



$Q = 0.1;\ 0.2;\ 0.5;\ 1/\sqrt{2};\ 1;\ 2;\ 5;\ 10;$

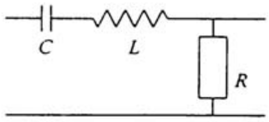


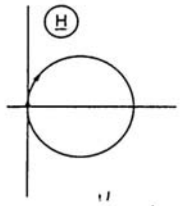
$Q = 0.2;\ 0.5;\ 1;\ 2;\ 5;$

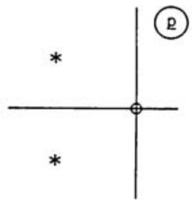
II. Bandpass zweiter Ordnung

B2. Bandpass zweiter Ordnung **BP2**

Güte Q>0.5







$$\boxed{\underline{H}(p)=\frac{p\omega_x/Q}{\omega_x{}^2+\frac{p\omega_x}{Q}+p^2}}$$

Konjugierte Pole bei $p_x=-\frac{\omega_x}{2Q}\pm j\omega_x\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$

Einfache NSt bei $p_o=0$

Normierung: $\underline{H}(\Omega)=\frac{j\Omega/Q}{\Omega^2-j\Omega/Q\ -1}$

$\Omega=\frac{\omega}{\omega_x}$; $\omega_x=\frac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Verstärkung: $H=\frac{1}{\sqrt{Q^2(\Omega-1/\Omega)^2+1}}$

Phase: $\varphi=\operatorname{arc\,cot}\left[Q(\Omega-1/\Omega)\right]-\frac{\pi}{2}$

Gruppenlaufzeit: $\tau_G=\frac{\tau}{Q}\cdot\frac{1+\Omega^2}{\left(\Omega^2-1\right)^2+(\Omega/Q)^2}$; $\tau=1/\omega_x$

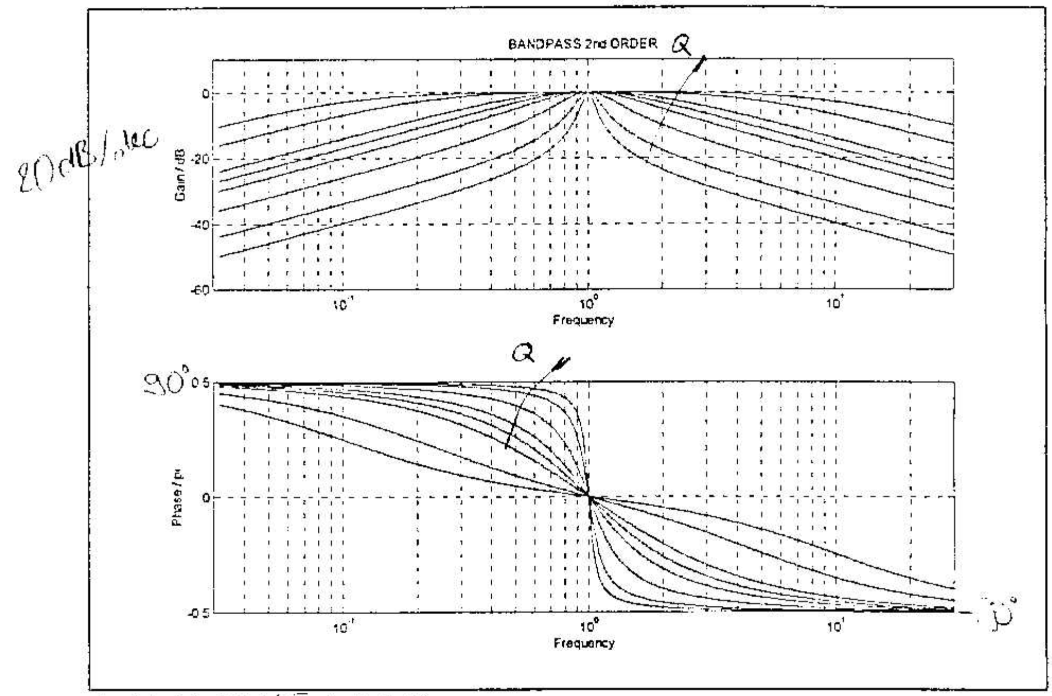
Impulsantwort: $h_0(t)=\frac{\omega_x\cdot e^{-\delta t}}{\sqrt{Q^2-\frac{1}{4}}}\cos(\omega_d t+\Theta)$

Sprungantwort: $h_{-1}(t)=\frac{e^{-\delta t}}{\sqrt{Q^2-\frac{1}{4}}}\sin(\omega_d t)$

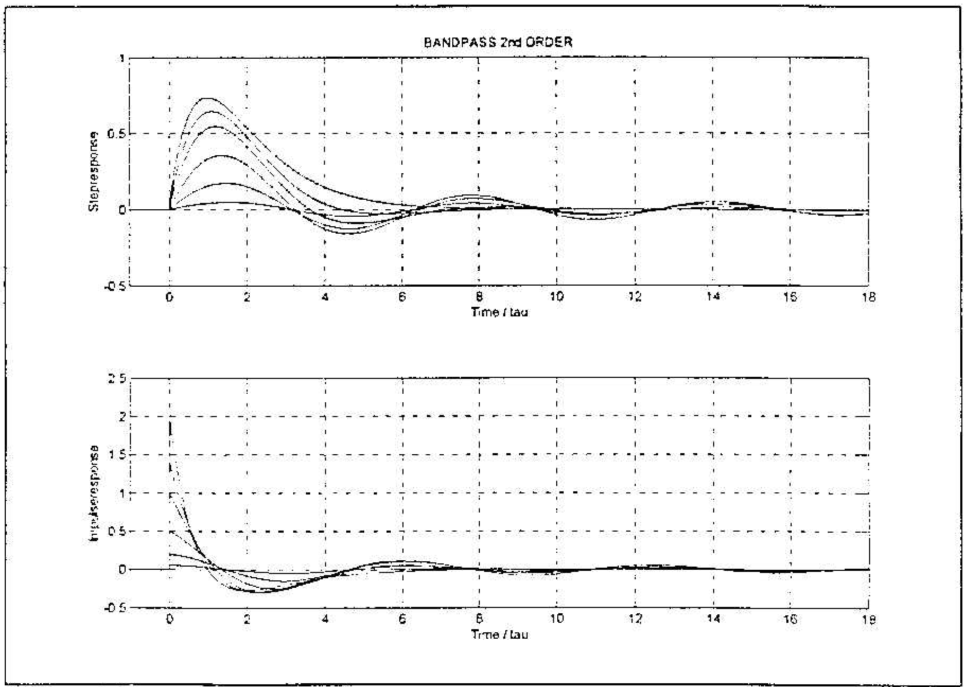
Die Gleichungen gelten für Typ 1. Für Typ 2 müssen $\underline{H}$, H, $h_0(t)$, $h_{-1}(t)$ mit Q multipliziert werden.

BP2

Typ 1



$Q = 0.1;\ 0.2;\ 0.5;\ 1/\sqrt{2};\ 1;\ 2;\ 5;\ 10;$

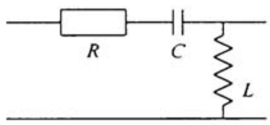


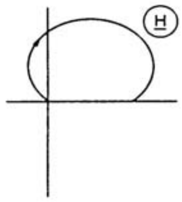
$Q = 0.5;\ 1/\sqrt{2};\ 1;\ 2;\ 5;\ 20;$

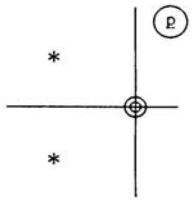
III. Hochpass zweiter Ordnung

B3. Hochpass zweiter Ordnung **HP2**

Güte Q>0.5







$$\boxed{\underline{H}(p) = \frac{p^2}{\omega_x{}^2 + \frac{p\omega_x}{Q} + p^2}}$$

Konjugierte Pole bei $p_x = -\frac{\omega_x}{2Q} \pm j\omega_x\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$

Doppelte NSt bei $p_0 = 0$

Normierung: $\underline{H}(\Omega) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - j\Omega/Q - 1}$

$\Omega = \frac{\omega}{\omega_x}$; $\omega_x = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Verstärkung: $H = \frac{\Omega^2}{\sqrt{\left(\Omega^2-1\right)^2 + \left(\Omega/Q\right)^2}}$

Phase: $\varphi = \operatorname{arc\,cot}\left[Q(\Omega - 1/\Omega)\right]$

Gruppenlaufzeit: $\tau_G = \frac{\tau}{Q}\cdot\frac{1+\Omega^2}{\left(\Omega^2-1\right)^2 + \left(\Omega/Q\right)^2}$; $\tau = 1/\omega_x$

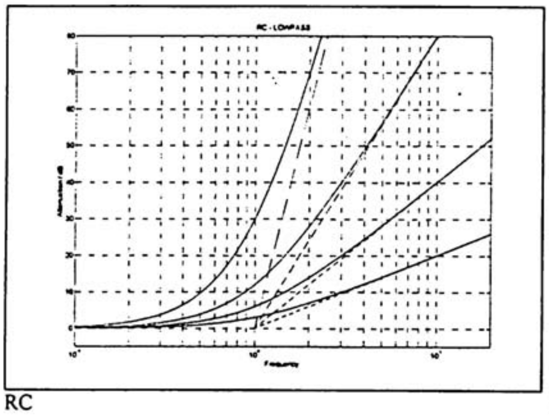
Impulsantwort: $h_0(t) = \delta_0(t) - \frac{\omega_x \cdot e^{-\delta t}}{\sqrt{1-\vartheta^2}}\sin(\omega_d t + 2\Theta)$

Sprungantwort: $h_{-1}(t) = \frac{e^{-\delta t}}{\sqrt{1-\vartheta^2}}\cos(\omega_d t + \Theta)$

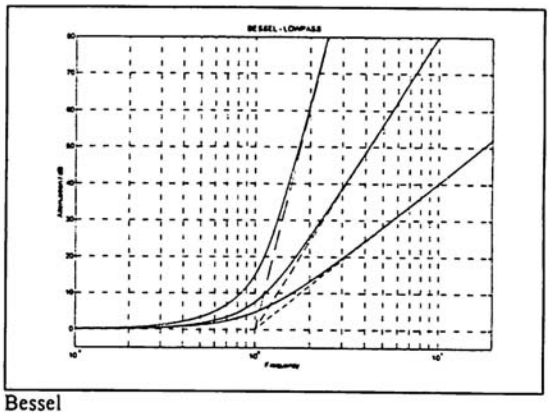
$\frac{1}{x} = \frac{1}{0}\sqrt{1 + \frac{1}{2x^2}}$

III. Vergleich von Filtern verschiedener Polfrequenzen und Polgüten

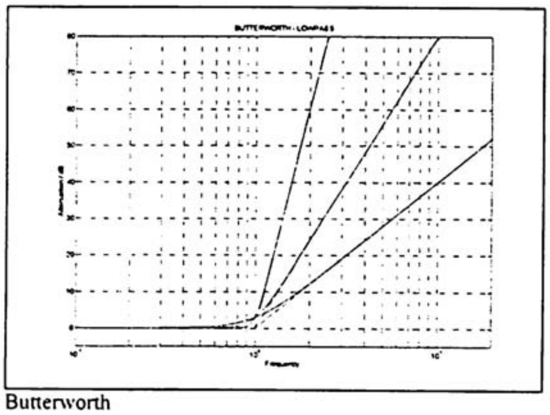
Dämpfung



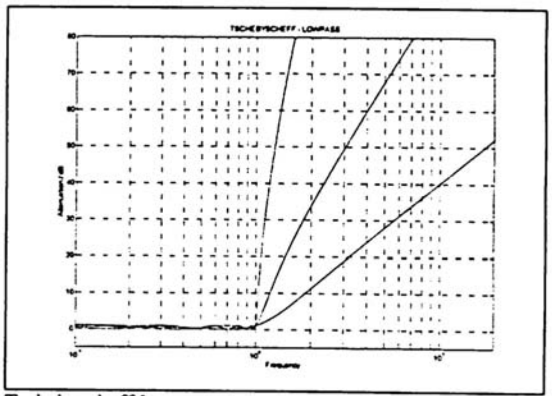
RC



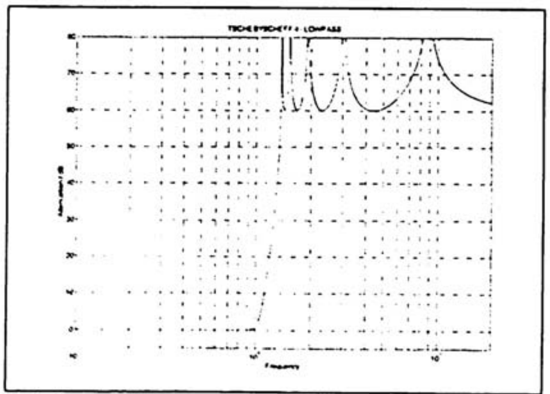
Bessel



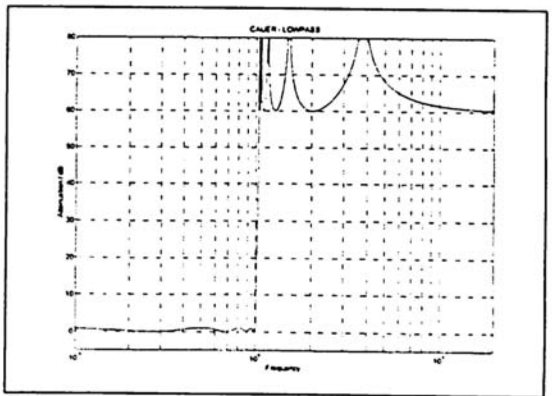
Butterworth



Tschebyscheff I



Tschebyscheff II



Cauer